II. Der harmonische Oszillator - fortgesetzt

Was ist die Wirkung von $\hat{a}$ und $\hat{a}^+$ auf $|n\rangle$?

$$\hat{N}\underbrace{(\hat{a}|n\rangle)}_{\propto |n-1\rangle} = (n-1)(\hat{a}|n\rangle) \qquad (\text{Lemma II})$$

$$\Rightarrow \hat{a}|n\rangle = \alpha_1 |n-1\rangle$$
$$\hat{a}^+|n\rangle = \alpha_2 |n+1\rangle$$

$$\underbrace{\langle n|\hat{N}|n\rangle}_{n} = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = (\langle n|\hat{a}^+)(\hat{a}|n\rangle) = \|\hat{a}|n\rangle\|^2 = |\alpha_1|^2$$

$$\Rightarrow |\alpha_1|^2 = n \quad \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{n}$$

analog folgt mit

$$\langle \hat{a}\hat{a}^+\rangle = \langle \underbrace{\hat{a}^+\hat{a}}_{\hat{N}} + \underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}\rangle = \langle \hat{N}+1\rangle = n+1$$

$$\Rightarrow |\alpha_2|^2 = n+1 \qquad \alpha_2 = \sqrt{n+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ \hat{a}^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\end{aligned}}$$

- Damit können wir beispielsweise $|n\rangle$ schreiben als $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad *$

Ortsdarstellung der Wellenfunktionen:

- wir wissen: $\hat{a}|0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p}\right)|0\rangle = 0 \qquad \Big| \langle x|\sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle x|0\rangle}_{\varphi_0(x)}\left[\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{i}{\hbar}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)}_{\hat{p} \text{ in Ortsdarstellung}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0(x) = 0 \qquad \text{DGL 1. Ordnung} \rightsquigarrow \text{Lösen durch Trennung d. Variablen}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_0(x) = A\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)} \qquad \text{mit } A = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \qquad \int |A|^2 \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)dx \overset{!}{=} 1$$

Jetzt können wir $*$ benutzen, um $\varphi_n(x)$ aus $\varphi_0(x)$ herzuleiten

$$\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x|(\hat{a}^+)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x}_{\tilde{x}} - \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{d}{dx}}_{\frac{d}{d\tilde{x}}}\Bigg)^n\varphi_0(x)$$

$$\hookrightarrow \varphi_0(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\left(\tilde{x} - \frac{d}{d\tilde{x}}\right)^n e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}$$

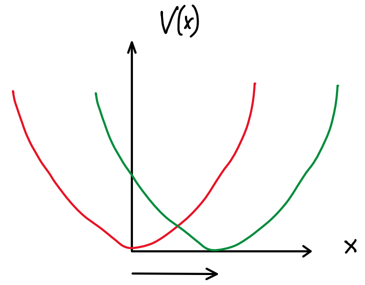
Schreibe die Wellenfunktionen mithilfe der Hermite Polynome

$$H_n(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \Rightarrow \boxed{\varphi_n(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}H_n(\tilde{x})\,e^{-\frac{1}{2}\tilde{x}^2}}$$

Matrix - Darstellung:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \sqrt{n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{a}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator im konstanten E-Feld



$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + m\omega^2 \frac{\hat{x}^2}{2} + V(\hat{x}) \quad \text{mit} \quad V(\hat{x}) = qE\hat{x}$$

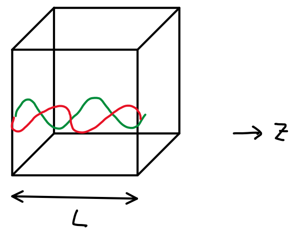
$$= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x} + \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 \underbrace{- \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}}_{\text{konstanter Shift in der Energie}}$$

mit der Substitution $\hat{y} = \hat{x} + \frac{qE}{m\omega^2}$

$$= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{y}^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

$$\Rightarrow E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

Beispiel: Beschreibung elektromagnetischer Wellen



Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\,\partial_t\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$$

$$m\lambda = 2\pi L \quad \Rightarrow \omega_m = \frac{2\pi c}{\lambda} = m\frac{c}{L}$$

$$\Rightarrow E_x(z,t) = \sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L^3}}\, q(t)\sin(kz)$$

$$B_y(z,t) = -\sqrt{\frac{2\omega^2}{\varepsilon_0 L^3}}\,\frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\,\dot{q}(t)\cos(kz)$$

$$\dot{q}(t) = p(t)$$

Hamilton Funktion:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\varepsilon_0\vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2(\vec{r},t)\right) \quad \text{(Gesamtenergie des EM-Feldes)}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r\left(\varepsilon_0 E_x^2(z,t) + \frac{1}{\mu_0}B_y(z,t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r\left(\frac{2\omega^2}{L^3}q^2(t)\sin^2(kz) + \frac{\cancel{2\omega^2}}{L^3}\frac{1}{\cancel{k^2}}p^2(t)\cos^2(kz)\right)$$

$$\int_0^L \sin^2(kz)\,dz = \frac{L}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\omega^2 q^2 + p^2(t)\right) \quad \Rightarrow \text{Harmonischer Oszillator}$$

Interpretation der Eigenzustände:
- $|n\rangle$ beschreibt die Anzahl an Photonen im System
- die Leiteroperatoren beschreiben die Erzeugung und Vernichtung von Photonen

Beispiel: N-dimensionaler harmonischer Oszillator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + m\omega_i^2 \hat{x}_i^2 \right)$$

Summe aus N 1D harmonischen Oszillatoren

$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2$ (Pythagoras)

Energieniveaus: $E_n = \hbar\omega \left((n_1 + \ldots + n_N) + \frac{N}{2} \right)$

Spezialfall: 3D-harmonischer Oszillator

$E_n = \hbar\omega \left((n_x + n_y + n_z) + \frac{3}{2} \right)$

Entartung der Energie:

E_0 - keine Entartung 1-fach

E_1 - $n_x = 1,\ n_y = n_z = 0$ 3-fach

$n_y = 1,\ n_x = n_z = 0$

$n_z = 1,\ n_x = n_y = 0$

E_2 - wie bei E_1 mit $\cancel{n_x} = 2$ 3-fach

zudem $n_x = 1,\ n_y = 1,\ n_z = 0$ 3-fach

$\left.\right\}$ 6-fach

$\Rightarrow$ allgemein: $g_n = \binom{2+n}{n}$ $\leadsto$ für N-Dimensionen $g_n = \binom{N-1+n}{n}$